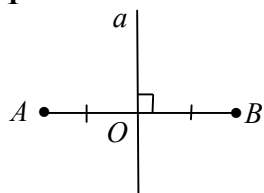


Серединный перпендикуляр. Определение, свойство

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нему. На рисунке 1 a – серединный перпендикуляр к отрезку AB .

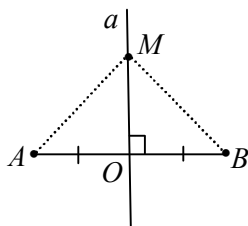
Рис. 1



$$a \perp AB, \\ AO = OB$$

Теорема. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка (рис. 2).

Рис. 2



$$\text{Дано: } a \perp AB, a \cap AB = O, \\ AO = OB, M \in a.$$

$$\text{Доказать: } AM = MB.$$

Доказательство

Если точка M совпадает с точкой O , то $AM = MB$, так как $AO = OB$.

Пусть M и O – различные точки. Рассмотрим $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$. Они прямоугольные, так как $a \perp AB$. $AO = OB$ по условию теоремы, OM – общая сторона. Следовательно, $\triangle OAM = \triangle OBM$ по признаку равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AM = MB$.

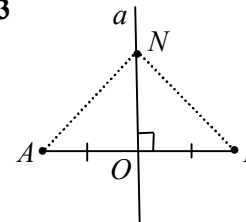
Итак, каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Ч.т.д.

Верна и обратная теорема.

Теорема. Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему (рис. 3).

Рис. 3



$$\text{Дано: } a \cap AB = O, AO = OB, \\ \text{точка } N, AN = NB.$$

$$\text{Доказать: } N \in a, a \perp AB.$$

Доказательство

Если точка $N \in AB$, то она совпадает с точкой O – серединой отрезка AB и поэтому $N \in a$.

Пусть $N \notin AB$. Рассмотрим $\triangle ANB$. Он равнобедренный, так как $AN = NB$. Отрезок NO – медиана $\triangle ANB$, а следовательно, и высота, так как медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию является и высотой.

Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому ON и a совпадают, и, значит, $N \in a$.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AM = MB$.

Итак, каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Ч.т.д.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника – замечательная точка треугольника, так как она является центром окружности, описанной около треугольника.